LiceoGarofanoCapua

CONCORSO PREMIO

MERAVIGLIOSAMENTEMATEMATICAMICHELEMENDITTO

CAPUA 10 Maggio 2010

La prova è costituita da 30 quesiti a risposta multipla e da 3 problemi.
Nei quesiti a risposta multipla una sola risposta è quella corretta. Ad ogni risposta corretta saranno attribuiti 4 punti, ad ogni risposta sbagliata 0 punti e ad ogni risposta non data 1 punto.
Alle risoluzioni dei problemi sarà attribuito un punteggio p con $0 \le p \le 40$.

Tempo massimo: 4 ore.
Non è consentito l'uso della calcolatrice.
Per le prime tre ore non sarà consentito ad alcun partecipante di allontanarsi dall'aula se non per gravi motivi.

Tabelle per le risposte ai quesiti:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Quesiti: risposte corrette ……….. X4 =

Risposte non date ………. X 1 =

Punteggio totale quesiti =

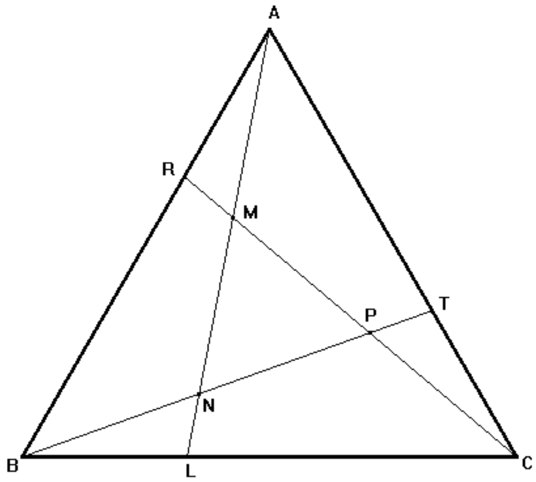
Problemi: P_1= P_2= P_3=

Punteggio totale prova P =

Problemi:

1) Tratto da: Mariano Mataix “In cerca della soluzione” RBA Italia.

Un triangolo equilatero di vertici ABC viene diviso in sette parti dai segmenti AL, BT e CR, tutti e tre di uguale lunghezza. Il triangolo AMR (e gli altri due ad esso congruenti) ha area uguale a 8 m^2, mentre il quadrilatero BNMR (e gli altri due ad esso congruenti) ha area uguale a 22 m^2. Calcolare l’area del triangolo MNP.



Soluzione: 5 m^2.

Posto l il lato del triangolo equilatero e x = AR, si ha $CR^2=AL^2=BT^2=l^2-xl+x^2$. Detto α l’angolo $RCA = CBT = LAB$ e applicando il teorema dei seni al triangolo ABL si ha $sen\alpha = \frac{xsen60°}{AL}$. Applicando il teorema dei seni al triangolo BNA si ha $NB = \frac{l}{sen120°} sen\alpha = \frac{lx}{AL}$ e applicando sempre il teorema dei seni al triangolo BNL si ha $NL = \frac{x}{sen60°} sen\alpha = \frac{x^2}{AL}$. Poiché i triangoli ABL e AMR sono simili le loro aree stanno tra loro come i quadrati di due lati si ha $\frac{AL^2}{x^2} = \frac{38}{8}$ quindi $\frac{l^2 - lx + x^2}{x^2} = \frac{38}{8}$. Posto $r = \frac{l}{x}$ otteniamo l’equazione $r^2 - r + 1 = \frac{38}{8}$ la cui unica soluzione accettabile è $r = \frac{5}{2}$. Il triangolo MNP è equilatero (quindi è simile ad ABC), detta A la sua area, quella del triangolo ABC è A+90, inoltre $\frac{A+90}{A} = \frac{l^2}{MN^2}$. Poiché MN =AL-AM-NL sostituendo e tenuto conto che AM = NB si ha $\frac{A+90}{A} = \frac{l^2}{MN^2} = \frac{l^2 - lx + x^2}{(l-2x)^2} = \frac{r^2 - r + 1}{(r-2)^2} = 19$.

Dunque $1 + \frac{90}{A} = 19$ quindi A=5 m^2

2)Salvatore incontra, dopo alcuni anni, il suo compagno di liceo, Andrea, molto bravo nel risolvere problemi. Volendo mettere alla prova questa sua capacità gli propone il seguente problema:

Qual è quel numero di 4 cifre tale che le prime due sono uguali, sono uguali anche le ultime due e il numero è un quadrato?

Soluzione 7744:

Il numero cercato è del tipo $10^3 a + 10^2 a + 10b + b$ =$1100a + 11b = 11(100a + b)$ Poiché esso è divisibile per 11 ed è un quadrato allora è divisibile per 11^2, quindi anche $100a + b = 99a + a + b$ è divisibile per 11 e cioè $a + b$ è divisibile per 11. Quindi tenuto conto che essendo un quadrato l'ultima cifra, cioè *b*, può essere una soltanto delle seguenti: 0,1,4,5,6,9; e poiché $a = 11 - b$ essa potrà essere 11,10,7,6,5,2, ma le prime due non possono essere, allora restano 7,6,5 e 2 e combinando queste informazioni otteniamo: **6655, 5566, 2299** e **7744.**
Il primo non è un quadrato poiché è divisibile per 5 ma non per 25, non lo è neanche il secondo perché è divisibile per 2 ma non per 4, neanche il terzo perché è uguale a 121x19. L'ultimo è il quadrato di 88.

3) Sull'Isola Chenoncè vive una tribù detta dei Cavalieri (essi dicono sempre la verità), un'altra detta dei Furfanti (essi dicono sempre il falso) e due altri abitanti, che vivono nella stessa capanna, uno è detto l'Astrologo e l'altro lo Stregone (non sappiamo se sono entrambi Cavalieri, Furfanti oppure uno è un Cavaliere e l'altro un Furfante). Un esploratore si reca nella capanna allo scopo di conoscere lo Stregone. Trova due persone uno col cappello rosso, l'altro col cappello giallo. L'esploratore chiede: lo Stregone è un Cavaliere? Risponde l'uomo col cappello rosso e dalla risposta che dà (sì o no), l'esploratore scopre che lo Stregone è l'uomo col cappello giallo. Perché?

Soluzione: Supponiamo che l'uomo col cappello rosso abbia risposto "sì". L'esploratore non avrebbe potuto da questa risposta capire chi dei due fosse lo stregone. Infatti chi aveva dato questa risposta poteva essere un Cavaliere e da ciò deduciamo che lo stregone è un cavaliere ma non sappiamo chi dei due è lo stregone oppure l'uomo che aveva risposto poteva essere un furfante e da ciò ne seguirebbe che anche lo stregone è un furfante, ma non sappiamo chi dei due è lo stregone. Quindi se avesse risposto sì l'esploratore non avrebbe potuto scoprire chi fosse lo stregone. Allora l'uomo dal cappello rosso ha risposto "no". Ora se l'uomo dal cappello rosso è un Cavaliere egli dice la verità dunque non può essere lui lo stregone che quindi sarà quello col cappello giallo; se l'uomo dal cappello rosso è un Furfante allora lo stregone è il contrario di quello che lui ha affermato cioè un Cavaliere e quindi è l'uomo dal cappello giallo. In ogni caso noi non sappiamo se lo stregone è un Furfante o un Cavaliere, né sappiamo se è un Furfante o Cavaliere quello col cappello rosso, ma è certo che alla domanda dell'esploratore l'uomo dal cappello rosso ha risposto no e che lo stregone è l'uomo col cappello giallo.

QUESITI

1) Qual è l'insieme S delle soluzioni della disequazione $\sqrt{x}+\sqrt{\frac{x}{x-4}}<2$?

A) S = $]4;+\infty[$ B) S = $\varnothing$ C) S = {0} D) S = {0,4}

Soluzione: C) S = {0}

Infatti l'espressione $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x}{x-4}}$ è definita per $x \in \{0\} \cup]4;+\infty[$

2) Per quali valori di $a,b \in \Re$ si verifica la disuguaglianza $a^8+b^8 \geq a^3b^5$?

A) $\forall\ a,b \in \Re$ B) Solo se $a>b$ C) Solo se $a<0$ e $b<0$
D) nessuna delle precedenti

Soluzione: A). $\forall\ a,b \in \Re$ si ha $a^3b^5 \leq |a|^3|b|^5$ quindi per $|a| \leq |b|$ avremo
$|a|^3|b|^5 \leq |b|^8 = b^8 \leq a^8+b^8$
e analogamente per $|b| \leq |a|$ avremo $|a|^3|b|^5 \leq |a|^8 = a^8 \leq a^8+b^8$

3) Una macchina produce bulloni. Si sa che se uno è difettoso allora la probabilità che lo sia anche il successivo è 1/20; mentre se è perfetto la probabilità che il successivo sia difettoso è 1/50. Sapendo che il primo è perfetto qual è la probabilità che il terzo sia difettoso?

A) 103/5000 B) 49/2500 C) 1/1000 D) Nessuna delle precedenti

Soluzione: A) 103/5000

Infatti (49/50)x(1/50)+(1/50)x(1/20)=103/5000

4) Quanti sono gli anagrammi che si possono realizzare con la parola CONCORSO?

A) 3360 B) 80640 C) 40320 D) Nessuna delle precedenti

Soluzione: : A) 3360 Infatti $\frac{8!}{3!2!}=3360$

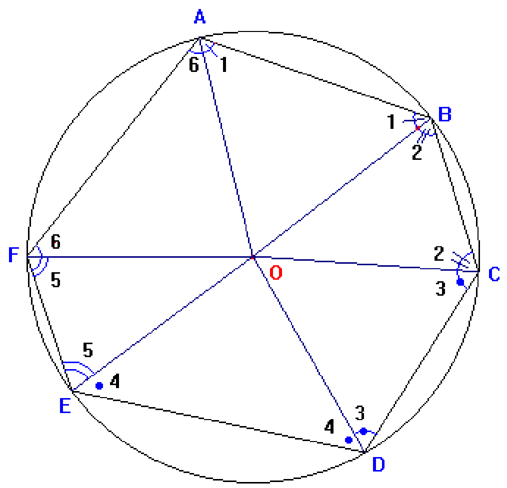
5) "*Qual è 'l geomètra che tutto s'affigge*
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,"
Dante in Paradiso XXXIII vv. 133-136
A quale questione allude Dante?
A) La quadratura del cerchio B) Il V postulato di Euclide C) Le Geometrie non euclidee
D) I numeri irrazionali

Soluzione: A) La quadratura del cerchio

6) Considera la seguente affermazione: "se un poligono convesso di un numero pari di lati è inscritto in una circonferenza la somma degli angoli di posto pari è uguale alla somma degli angoli di posto dispari" essa è:

A) Sempre falsa
B) Sempre vera
C) Vera solo se il poligono è regolare
D) Vera solo se uno dei lati è uguale al raggio

Soluzione B) Sempre vera



In breve, facendo riferimento all'esagono in figura possiamo osservare che

$\hat{A} + \hat{C} + \hat{E} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

$\hat{B} + \hat{D} + \hat{F} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

Dunque $\hat{A} + \hat{C} + \hat{E} = \hat{B} + \hat{D} + \hat{F}$

7) Siano r e q due numeri interi positivi con $r > q$. Sia definita l'operazione & tale che

$r \,\&\, q = \dfrac{2^{2r+q}}{2^{r-q}}$ Per quanti valori di r risulta $r \,\&\, 1 = 4$?

A) nessun valore B) un valore C) infiniti valori D) nessuna delle precedenti

Soluzione: A) nessun valore

Infatti $r \,\&\, q = \dfrac{2^{2r+q}}{2^{r-q}}$; $r \,\&\, q = 2^{r+2q}$; $r \,\&\, 1 = 2^{r+2}$; $2^{r+2} = 4$; $r = 0$

valore non accettabile.

8) Se x, y e z sono numeri interi positivi con $xy = 24$, $xz = 48$ e $yz = 72$, quanto vale $x + y + z$?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24

Soluzione: C) 22

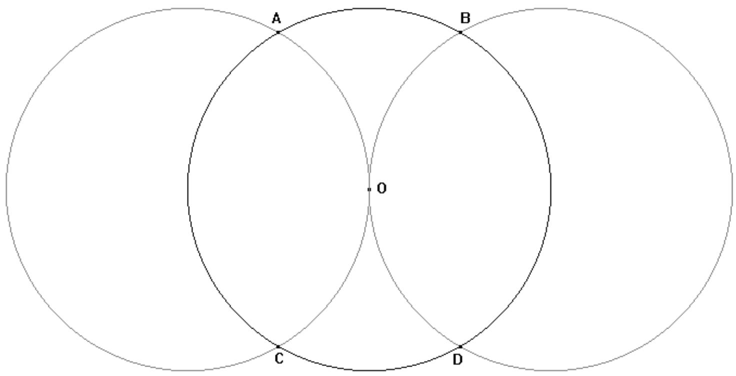
Consideriamo il rapporto $\frac{xy}{xz} = \frac{y}{z} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \; z = 2y$

Segue $yz = y(2y) \quad \Rightarrow \; 2y^2 = 72 \quad \Rightarrow \; y = 6 \quad z = 12$

Perciò $y = 6 \quad z = 12 \quad x = 4$

e $x + y + z = 22$

9) Due circonferenze uguali e tangenti esternamente in O sono segate da una terza circonferenza ad esse uguale e di centro O, nei punti A,B,C,D. Qual è l'area complessiva dei triangoli curvilinei OAB e OCD?



A) $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) r^2$ B) $\left(\sqrt{6} + \frac{\pi}{6}\right) r^2$

C) $3\left(\pi + \sqrt{2}\right) r^2$ D) $\left(\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right) r^2$

Soluzione A. $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) r^2$

In breve l'area richiesta è data dalla differenza tra l'area del cerchio di raggio r e il quadruplo dell' area del segmento circolare di base AC.

Area segmento circolare di base AC = Area settore di angolo al centro $\widehat{AOC}$ − Area triangolo AOC

Poiché il triangolo AOC è isoscele di lato r ed altezza $\frac{r}{2}$ avremo che:

$\widehat{AOC} = 120° = \frac{2}{3}\pi$; area del settore di angolo al centro $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{3}r^2$;

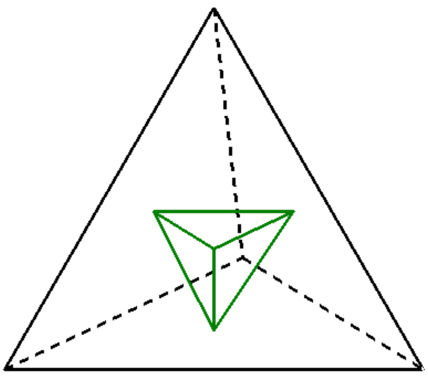
area triangolo AOC $= \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$; area segmento circolare di base AC $= \frac{\pi}{3}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}$

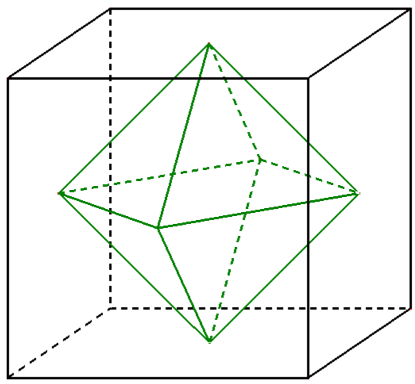
Si conclude che:

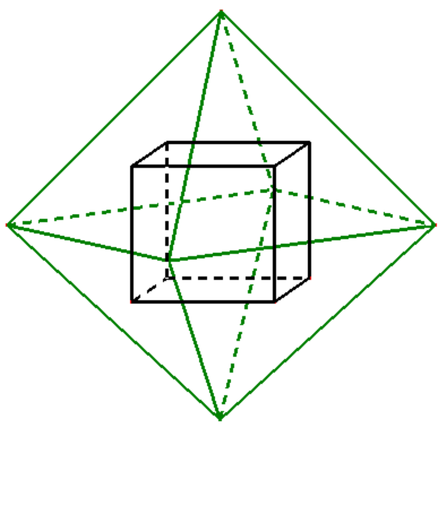
Area richiesta $= \pi r^2 - 4\left(\frac{\pi}{3}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)r^2$

10) Considerato uno qualsiasi dei cinque poliedri regolari, il poliedro avente per vertici i centri delle facce del poliedro dato è ancora un poliedro che si dice duale di quello originario.
I duali del tetraedro, del cubo e dell' ottaedro sono rispettivamente:
   A) l'ottaedro, il cubo e il tetraedro
   B) il tetraedro, il cubo e l'ottaedro
   C) il prisma, la piramide, il parallelepipedo rettangolo
   D) il tetraedro, l'ottaedro e il cubo

Soluzione: **D. il tetraedro, l'ottaedro e il cubo.** Basta osservare le figure







11) Date le parabole di equazione $y = x^2 + 2x + 3$ e $y = 3x^2 + 4x - 10$ quali sono le equazioni delle tangenti comuni?

A) Non ci sono tangenti comuni

B) $y = -2x + 3$ $\qquad y = 4x - 18$

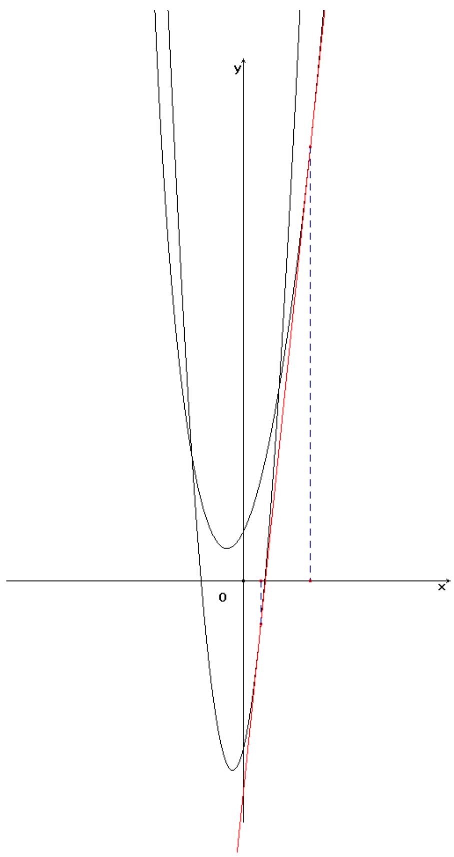
C) $y = -x + 15$ $\qquad y = 6x - 5$

D) $y = -8x - 22$ $\qquad y = 10x - 13$

Soluzione **D)** $y = -8x - 22$ $\qquad y = 10x - 13$

Il coefficiente angolare della retta tangente alla prima parabola nel suo generico punto di ascissa x_1 è $m_1 = 2x_1 + 2$; il coefficiente angolare della retta tangente alla seconda parabola nel suo generico punto di ascissa x_0 è $m_0 = 6x_0 + 4$.

Perciò le equazioni delle due tangenti sono:



$$y = (6x_0 + 4)(x - x_0) + 3x_0^2 + 4x_0 - 10 = (6x_0 + 4)x - 3x_0^2 - 10$$

$$y = (2x_1 + 2)(x - x_1) + x_1^2 + 2x_1 + 3 = (2x_1 + 2)x - x_1^2 + 3$$

Se vogliamo che siano coincidenti, queste rette devono avere lo stesso coefficiente angolare e lo stesso termine noto quindi

$$\begin{cases} 2x_1 + 2 = 6x_0 + 4 \\ -3x_0^2 - 10 = -x_1^2 + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ x_1 = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 4 \end{cases}$$

Perciò le due tangenti comuni sono

$y = -8x - 22$ $\qquad y = 10x - 13$

12) Sia k la lunghezza dello spigolo di un cubo. Qual è la superficie del solido i cui vertici sono i punti medi degli spigoli del cubo?

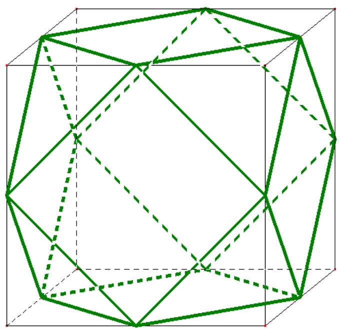
A) $5\sqrt{3}\ k^2$

B) $\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)k^2$

C) $2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)k^2$

D) $3k^2$

Soluzione: B. $\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)k^2$



Dalla figura si può notare che la superficie del solido è data dalla somma delle superfici di sei quadrati di lato $\frac{\sqrt{2}}{2}k$ e di otto triangoli equilateri di lato $\frac{\sqrt{2}}{2}k$.

Quindi:

Superficie solido = $\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)k^2$

13) Dati i punti A (-2,0) e B (2,0) e la retta r: x + y - 3 = 0, l'equazione del luogo geometrico descritto dal baricentro del triangolo APB al variare di P su r è:

A) x + y – 1 = 0 B) x + y – 2 = 0 C) x + y = 0 D) x + y – 4 = 0

Soluzione: A. x + y - 1 = 0

Siano (α, β) le coordinate di P: esse sono legate dalla relazione $\alpha+\beta$ - 3 = 0, che esprime l'appartenenza di P ad r. Le coordinate del baricentro G (punto di incontro delle tre mediane) del triangolo sono x = $\frac{\alpha}{3}$ e y = $\frac{\beta}{3}$. Le equazioni parametriche del luogo geometrico descritto da G sono quindi x = $\frac{\alpha}{3}$ e y = $\frac{\beta}{3}$ con la condizione $\alpha+\beta$ - 3 = 0 . Ricavando α e β dalle prime due relazioni e sostituendo nella terza si ha l'equazione x+y-1= 0, che rappresenta una retta parallela alla retta r.

14) Il pentagono stellato (o pentagramma o pentalfa) è la figura che fu scelta dai Pitagorici come simbolo della loro scuola. A questa stella che simboleggia salute, energia, luce, legame furono attribuiti anche vari significati magici e religiosi.

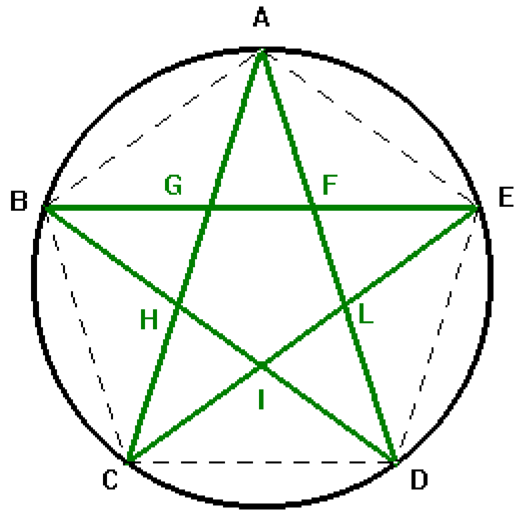
Il pentagono stellato è una figura intrecciata che ha come lati le diagonali di un pentagono regolare. Facendo riferimento alla figura, se il segmento AF misura s, quanto misura il segmento GF?

A) $\sqrt{5+2\sqrt{5}}\ s$

B) $(\sqrt{2}-1)\ s$

C) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\ s$

D) $\left(\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}\right)$ s



Soluzione: C. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\ s$

Il triangolo AGF ha un angolo di 36° (metà del corrispondente angolo al centro) e due di 72° . Poiché "se in un triangolo isoscele l'angolo al vertice è 36°, la base del triangolo è la sezione aurea di uno dei lati congruenti" avremo che GF è la sezione aurea di AF.

Dunque GF = $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\ s$

Oppure:

GF = 2 AG sen18° = $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\ s$

15) Nel modello di geometria non euclidea di tipo iperbolica la somma degli angoli interni di un triangolo è

A) maggiore di un angolo piatto

B) minore di un angolo piatto

C) uguale a un angolo piatto

D) nessuna delle precedenti

Soluzione: B) minore di un angolo piatto

Nelle geometrie non euclidee non è valido il V postulato di Euclide. La somma degli angoli interni di un triangolo non è costante: nella geometria iperbolica è sempre minore di un angolo piatto, in quella ellittica è sempre maggiore di un angolo piatto.

16) Supponiamo che 3 turisti arrivino, ciascuno per proprio conto, in una località in cui ci sono 5 alberghi. Se ogni turista sceglie a caso in quale albergo alloggiare qual è la probabilità che alloggino in alberghi diversi?

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{1}{20}$ C. $\frac{9}{25}$ D. $\frac{12}{25}$

Soluzione: D. $\frac{12}{25}$

Infatti p = $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{5^3}$

17) In un triangolo rettangolo la bisettrice dell'angolo retto ha per misura b e l'area è uguale a $4b^2$. Quanto misurano i cateti?

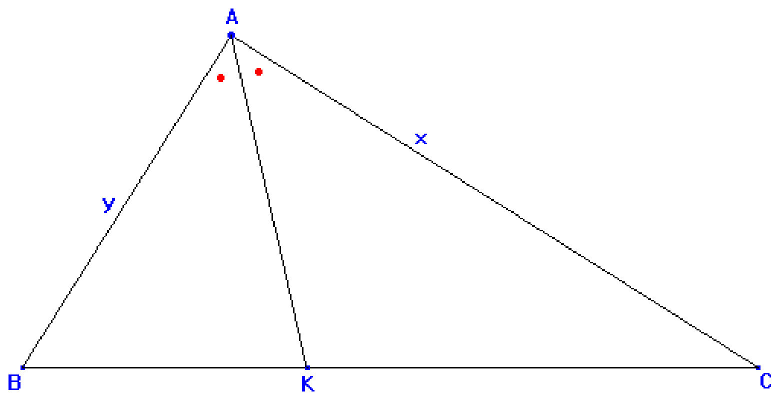
A. $2b\left(2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}\right)$

B. $b\sqrt{2}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$

C. $b\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$

D. $3b\left(6 \pm \sqrt{6}\right)$

Soluzione A. $2b\left(2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}\right)$

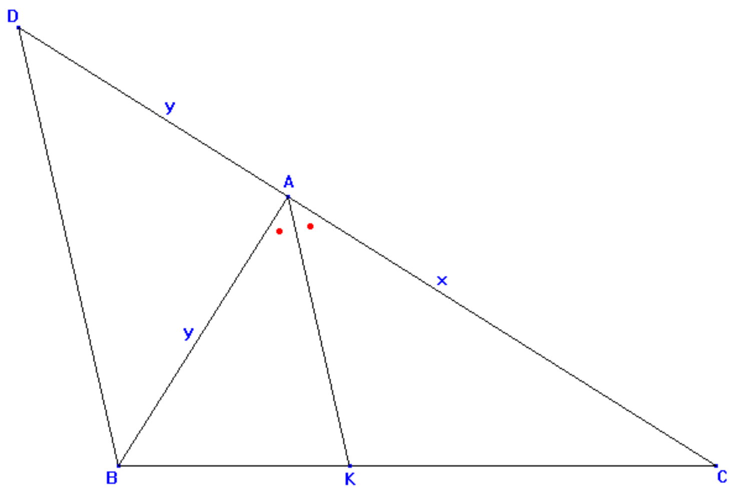


Facendo riferimento alla figura poniamo AB = y e AC = x

AK = b $\longrightarrow$ $\frac{2xy}{x+y}\cos\frac{\pi}{4}$ = b $\longrightarrow x+y = \frac{xy\sqrt{2}}{b}$

A = $4b^2$ $\longrightarrow$ xy = 8 b^2

$$\begin{cases} xy = 8b^2 \\ x+y = \frac{xy\sqrt{2}}{b} \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 8b^2 \\ x+y = 8b\sqrt{2} \end{cases} \qquad x^2 - 8bx\sqrt{2} + 8b^2 = 0 \quad = 2b\left(2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}\right)$$



Soluzione geometrica della prima parte: prolungando CA di un segmento AD uguale ad AB si ottiene un triangolo isoscele con un lato parallelo alla bisettrice. Dalla similitudine dei triangoli CDB e CAK si ricava la misura della bisettrice AK.

18) Consideriamo l'equazione: $2x^3+(k+1)x^2+hx-20=0$

Sapendo che le soluzioni sono k,h e 2 determinare il valore di $kh\ +\ 2$

A) 5 B) 3 C) 7 D) Nessuna delle precedenti

Soluzione: C) 7.

Infatti poiché 2 è soluzione sostituendo otteniamo $h=-2k$ Dividendo il polinomio $p(x)=2x^3+(k+1)x^2-2kx-20$ per $(x-2)$ si ottiene $q(x)=2x^2+(k+5)x^2+10$ che ammette come zeri k e h con $kh=\dfrac{10}{2}=5$

19) Stabilire quale delle seguenti trasformazioni è un'affinità

A) $\begin{cases} x'=x \\ y'=x+1 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x'=1 \\ y'=x+y+1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} x'=x+y+1 \\ y'=x-y+2 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x'=2x+y^2+4 \\ y'=-x^2+3y \end{cases}$

Soluzione: **B)** $\begin{cases} x'=x+y+1 \\ y'=x-y+2 \end{cases}$

B) è un'affinità perché è una trasformazione lineare con determinante diverso da 0

20) Quanti sono i valori di k intero positivo, tali che $k^2 + 9k$ è un quadrato?

A) Per infiniti valori

B) Per nessun valore

C) Per 2 valori

D) Sono false tutte le precedenti

Soluzione: C) Per 2 valori.

Infatti posto $k^2 + 9k = h^2$ si ha che $h > k$. Poniamo $h = k + t$ e sostituendo otteniamo $k = \dfrac{t^2}{9-2t}$ e quindi gli unici valori di t ammissibili sono 3 e 4 che ci danno, per k i valori 3 e 16

21) Per quale valore di $n \in \mathrm{N}$ la quantità $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)........\left(1+\frac{1}{n}\right)$ è uguale a 1000?

A) Per nessun valore

B) Per n=1999

C) Per n>2000

D) Sono false tutte le precedenti

Soluzione: B) n=1999.

Infatti si ha $\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right).......\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{n+1}{2}$

22) Sapendo che a e b sono reali e tali che $a^2 + b^2 > a^3 + b^3$ si deduce che:

A) $a > 1$ oppure $b > 1$

B) $a < 0$ oppure $b < 0$

C) se $a > 1$ allora $b < 1$

D) se $a > 0$ allora $b < 0$

Soluzione: C) se $a > 1$ allora $b < 1$

Infatti $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$ mostrano che le altre tre sono false. Inoltre se $x > 1$ ne segue che $x^3 > x^2$ quindi almeno uno dei due deve essere minore di 1. Infine notiamo che per $a = 2$ e $b = -2$ la disuguaglianza si verifica.

23) In una scatola ci sono 20 palline, 10 rosse e 10 nere. Estraendo a caso 10 palline quale tra queste situazioni è più probabile?

A) Sono tutte nere

B) 6 nere e 4 rosse

C) 5 nere e 5 rosse

D) Hanno tutte la stessa probabilità

Soluzione: C) 5 nere e 5 rosse

Infatti gli eventi “si estrae una pallina rossa” , “si estrae una pallina nera”, sono uno il contrario dell’altro ed hanno probabilità 1/2.

Quindi la probabilità che si verifichi, su n estrazioni k volte uno di essi (e quindi $n-k$ volte l’altro) è $\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Tenuto conto che $\binom{10}{5}>\binom{10}{6}>\binom{10}{0}$

la risposta corretta è la (C)

24) Quanti sono i divisori di $n=2^7 5^8 7^2$?

A) 17 B) 20 C) 216 D) 532

Soluzione: C) 216 Infatti i divisori di $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}....p_r^{\alpha_r}$, con $p_1, p_2,....p_r$ numeri primi, sono $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)....(\alpha_r+1)$

25) Per quanti valori del numero naturale n la quantità $\frac{4n+3}{n+2}$ è un numero naturale?

A) Per nessun valore B) Per infiniti valori

C) Per un solo valore D)Sono false tutte le precedenti

Soluzione: C) Per un solo valore

Infatti per il sol valore n = 3 in quanto $\frac{4n+3}{n+2}=4-\frac{5}{n+2}$

26) L’equazione $\log_x 4+\log_4 x=-2$

A) Non ha soluzioni B) ha infinite soluzioni

C) ha una sola soluzione D) ha due soluzioni

Soluzione: C) ha una sola soluzione

Infatti essa è equivalente a $\frac{1}{\log_4 x}+\log_4 x=-2$

27) Qual è il periodo della funzione: $f(x) = sen4x\cos 8x$?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) 2π C) π D)nessuno dei precedenti

Soluzione: **A)** $\frac{\pi}{2}$ Infatti utilizzando le formule di Werner la funzione diventa

$$f(x) = \frac{1}{2}(sen12x - sen4x)$$

28) Sull'Isola Chenoncè vive una tribù detta dei Cavalieri (essi dicono sempre la verità), un'altra detta dei Furfanti (essi dicono sempre il falso). Un esploratore incontra tre abitanti dell'isola e chiede loro: "Chi di voi tre è un Cavaliere?". Il primo risponde: Solo io. Il secondo: Solo io. Il terzo: Al massimo solo uno tra noi è un Cavaliere. Da ciò ne segue che:

A) Il primo e il secondo sono Cavalieri, il terzo è un Furfante

B) Sono tre Furfanti

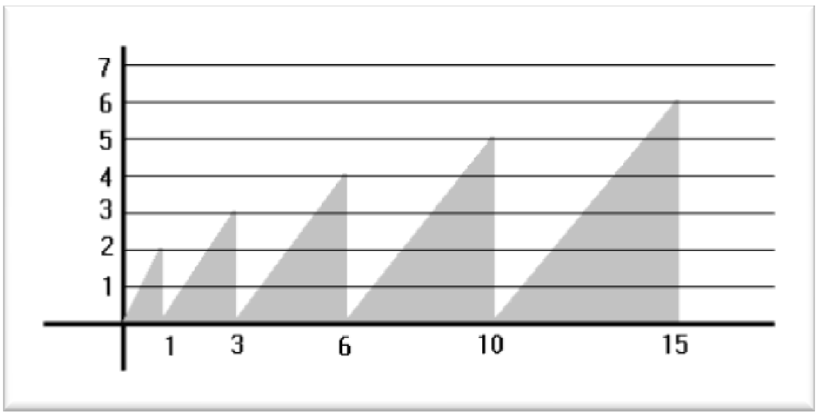
C) Il terzo è l'unico Cavaliere

D) Non è possibile stabilire chi sono i Cavalieri e chi i Furfanti.

Soluzione C) Il terzo è l'unico Cavaliere. Infatti se il terzo avesse detto il falso allora i Cavalieri sarebbero due, il primo e il secondo, ma ciò non è possibile perché le loro affermazioni sono in contraddizione. Dunque il terzo è un Cavaliere e da ciò che afferma ne segue che egli è l'unico Cavaliere tra i tre.

29) Nella sequenza di triangoli disegnati sotto se A_n rappresenta l'area dell'ennesimo triangolo per quale valore di n risulterà $A_n = 105$?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15

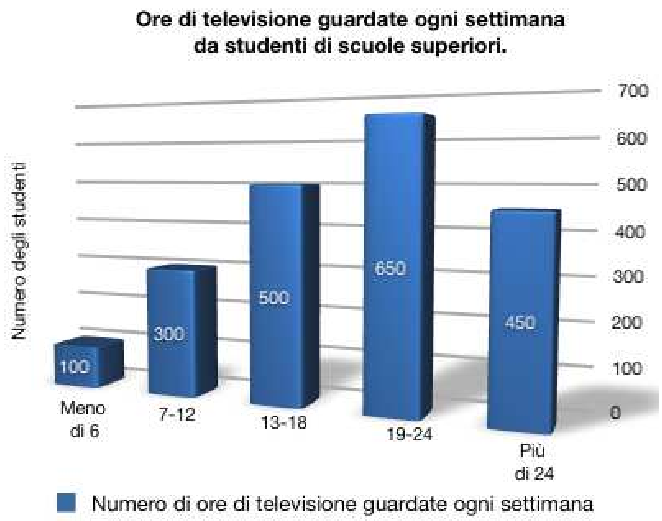


Soluzione: **C) 14**

L'area dell'ennesimo triangolo è $A_n = \frac{1}{2}(n)(n+1)$ $A_n = 105$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}(n)(n+1) = 105$

$\Rightarrow$ $n^2 + n - 210 = 0$ $\Rightarrow$ $n = -15$ $n = 14$ poiché n è un numero positivo la soluzione è $n = 14$

30) Facendo riferimento al grafico che segue qual è la percentuale di studenti delle scuole superiori che guarda minimo 19 ore di televisione ogni settimana?



A) 33% B) 45% C) 55% D) nessuna delle precedenti

Soluzione: D) 55%

Il numero totale degli studenti è 2000; il numero degli studenti delle scuole superiori che guarda minimo 19 ore di televisione ogni settimana è 1100; la percentuale richiesta è $\frac{1100}{2000} = \frac{55}{100} = 55\%$